Ion TUDOR

matematică

algebră, geometrie

• Modalităţi de lucru diferenţiate
• Pregătire suplimentară prin planuri individualizate

Caiet de lucru

Partea a II-a

6

Ediţia a III-a, revizuită

ÎNVĂTARE DE INIȚIERE ®
susținere, remediere

Editura Paralela 45

CUPRINS

ALGEBRA

ALGEBRĂ

Capitolul III
Mulțimea numerelor întregi

Lecția 1. Mulțimea numerelor întregi. Opusul unui număr întreg

Citesc și rețin

Numerele naturale nenule scrise cu semnul „+” în față: +1, +2, +3, … se numesc numere întregi pozitive. Mulțimea numerelor întregi pozitive se notează cu $\mathbb{Z}_+$, deci $\mathbb{Z}_+ = \{+1, +2, +3, \ldots\}$ și avem $\mathbb{N}^* = \mathbb{Z}_+$.

Numerele naturale nenule scrise cu semnul „–” în față: –1, –2, –3, … se numesc numere întregi negative. Mulțimea numerelor întregi negative se notează cu $\mathbb{Z}_-$, deci $\mathbb{Z}_- = \{-1, -2, -3, \ldots\}$.

Numărul natural 0 este singurul număr întreg care nu este nici pozitiv, nici negativ.

Mulțimea numerelor întregi se notează cu $\mathbb{Z}$ și se definește astfel: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$.

Mulțimea $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ se numește mulțimea numerelor întregi nenule.

Numerele întregi care aparțin reuniunii $\{0\} \cup \mathbb{Z}_+$ se numesc numere întregi nenegative.

Definiție: Prin **opusul numărului** întreg nenul a înțelegem numărul întreg $-a$. Opusul numărului întreg 0 este numărul întreg 0.

Exemple: Opusul numărului întreg 5 este numărul întreg –5.
Opusul numărului întreg –8 este numărul întreg 8.

Cum se aplică?

1. Se consideră mulțimea $A = \{-6, 15, 0, -21, 8\}$. Determinați mulțimile:
a) $E = \{x \in A \mid x \in \mathbb{Z}_+\}$;
b) $F = \{x \in A \mid x \in \mathbb{Z}_-\}$.

Soluție:
a) $E = \{15, 8\}$; b) $F = \{-6, -21\}$.

2. Scrieți opusele următoarelor numere întregi:
a) –9; b) 0; c) 17; d) –11.

Soluție:
a) 9; b) 0; c) –17; d) 11.

Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Citiți mulțimile următoare:

a) $\mathbb{Z}_+$; b) $\mathbb{Z}_-$; c) $\mathbb{Z}^*$; d) $\mathbb{Z}$.

2. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $-25 \in \mathbb{Z}_-$; ☐ b) $42 \in \mathbb{Z}_+$; ☐ c) $51 \notin \mathbb{Z}_-$; ☐ d) $-71 \notin \mathbb{Z}_+$; ☐

e) $49 \notin \mathbb{Z}_+$; ☐ f) $-28 \in \mathbb{Z}_-$; ☐ g) $-35 \notin \mathbb{Z}_-$; ☐ h) $87 \in \mathbb{Z}_+$. ☐

3. Se consideră mulțimea $A = \{-2, 4, -5, 7, 8, -1, 0, -13, 12, -9\}$. Enumerați elementele mulțimilor:

a) $A_1 = \{x \in A \mid x \in \mathbb{Z}_+\}$; b) $A_2 = \{x \in A \mid x \in \mathbb{Z}_-\}$.

	a)														b)											

4. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $7 \in \mathbb{N}$; ☐ b) $-9 \in \mathbb{N}$; ☐ c) $12 \in \mathbb{Z}$; ☐ d) $-5 \in \mathbb{Z}$; ☐

e) $0 \notin \mathbb{Z}$; ☐ f) $0 \in \mathbb{Z}^*$; ☐ g) $0 \notin \mathbb{Z}^*$; ☐ h) $0 \in \mathbb{Z}$. ☐

5. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) Mulțimea $\mathbb{Z}_+$ este finită. ☐ b) Mulțimea $\mathbb{Z}_-$ este finită. ☐

c) Mulțimea $\mathbb{Z}^*$ este infinită. ☐ d) Mulțimea $\mathbb{Z}$ este infinită. ☐

6. Se consideră mulțimea $E = \{-15, 0, 6, -8, 2, 17\}$. Determinați următoarele mulțimi:

a) $E \cap \mathbb{Z}_-$; b) $E \cap \mathbb{Z}_+$; c) $E \cap \mathbb{Z}^*$; d) $E \setminus \mathbb{Z}_-$; e) $E \setminus \mathbb{Z}_+$; f) $E \setminus \mathbb{Z}^*$.

7. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{Z}^*$; ☐ b) $\mathbb{Z}_- \subset \mathbb{Z}^*$; ☐ c) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}^*$; ☐ d) $\mathbb{Z}^* \subset \mathbb{Z}$. ☐

8. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}^* = \varnothing$; ☐ b) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}$; ☐ c) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}^* = \mathbb{N}^*$; ☐ d) $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}^* = \{0\}$. ☐

9. Completați tabelul următor:

Numărul	43	–7	–25	134	0	–91	–72	64	–8
Opusul									

10. Completați tabelul următor:

Numărul	–6			201		–18			92
Opusul		42	–58		307		–9	83	

Exerciții și probleme de dificultate medie

11. Se consideră mulțimea $A = \{-6, -5, 2, 0, 1, 7, -13\}$. Determinați mulțimea $B = \{y \mid y$ este opusul lui $x, x \in A\}$.

12. Se consideră mulțimea $E = \{-1, -4, 6, -11, 8, 0, 9\}$. Determinați mulțimea $F = \{y \mid y$ este opusul lui $x, x \in E\}$.

13. Temperaturile maxime pe țară înregistrate la ora 13 în zilele de 20 și 21 ianuarie sunt reprezentate de două numere întregi opuse, impare și consecutive. Precizați cele două valori de temperatură.

14. Temperaturile minime pe țară înregistrate la ora 7 în zilele de 15 și 16 martie sunt reprezentate de două numere întregi consecutive și prime. Precizați cele două valori de temperatură.

15. Se consideră mulțimile $A = \{-7, -1, 0, 1, 4\}$ și $B = \{b \mid b$ este opusul lui $a, a \in A\}$. Enumerați elementele următoarelor mulțimi și precizați cardinalul acestora.

a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $A \setminus B$; d) $B \setminus A$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

16. Se consideră numărul întreg $a = -\underbrace{(-(-(-...(-1)...)))}_{100 \text{ paranteze}}$. Scrieți sub forma cea mai simplă opusul numărului întreg a.

17. Se consideră numărul întreg $x = -\underbrace{(-(-(-...(-1)...)))}_{106 \text{ paranteze}}$. Scrieți sub forma cea mai simplă opusul numărului întreg x.

Ce notă merit? Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Se consideră mulțimea $A = \{-13, -2, 8, 0, 11, -10\}$. Enumerați elementele următoarelor mulțimi și precizați cardinalul acestora.

a) $A_1 = \{x \in \mathbb{Z}_- \mid x \in A\}$; b) $A_2 = \{x \in \mathbb{Z}_+ \mid x \in A\}$; c) $A_3 = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid x \in A\}$.

(3p) **2.** Scrieți opusele următoarelor numere întregi:

a) 87; b) –705; c) 101.

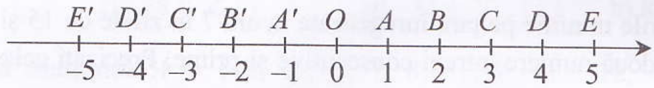
(3p) **3.** Efectuați:

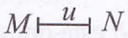
a) $\mathbb{Z}^* \setminus \mathbb{Z}_+$; b) $\mathbb{Z}_- \cap \mathbb{Z}_+$; c) $\mathbb{Z}^* \setminus \mathbb{Z}_-$.

Lecția 2. Reprezentarea numerelor întregi pe axa numerelor

Citesc și rețin

Pe dreapta d se fixează un punct O, numit origine, se stabilește un sens de parcurgere (indicat de o săgeată) și se alege o unitate de măsură (un segment MN de lungime u). Cu aceste trei proprietăți, dreapta d se numește axa numerelor.





Numerele întregi pot fi reprezentate pe axa numerelor.

Oricărui număr întreg îi corespunde un punct pe axă, numărul întreg numindu-se coordonata punctului respectiv. Coordonata punctului O este numărul întreg 0.

Exemple: Numărul întreg 4 este coordonata punctului D.
Numărul întreg -1 este coordonata punctului A'.

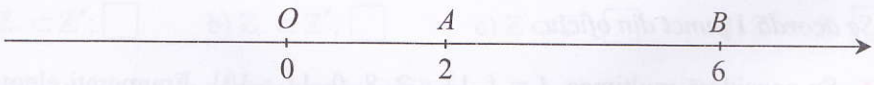
Observație: Două puncte de pe axa numerelor, care au drept coordonate două numere întregi opuse, sunt simetrice în raport cu originea axei.

Exemplu: Punctul C' este simetricul punctului C față de punctul O în figura de mai sus.

Cum se aplică?

1. Punctele A și B sunt reprezentate pe axa numerelor cu originea în punctul O și au coordonatele 2, respectiv 6. Dacă $AB = 28$ mm, aflați OA și OB.

Soluție:



Mai întâi aflăm lungimea unității de măsură pe care o notăm cu x. $AB = OB - OA = 6x - 2x = 4x$, deci $4x = 28$ mm și obținem $x = 7$ mm, prin urmare $OA = 2 \cdot 7$ mm $= 14$ mm și $OB = 6 \cdot 7$ mm $= 42$ mm.

2. Punctele A și A' sunt reprezentate pe axa numerelor și sunt simetrice în raport cu originea axei O. Dacă unitatea de măsură are lungimea de 1 cm și $AA' = 10$ cm, determinați coordonatele punctelor A și A'.

Soluție:

Notăm $OA = OA' = x$, deci $AA' = 2x$ sau $2x = 10$ cm, de unde rezultă că $x = 5$ cm și, cum $u = 1$ cm, deducem că cele două puncte au coordonatele 5 și -5, sau -5 și 5.

Știu să rezolv

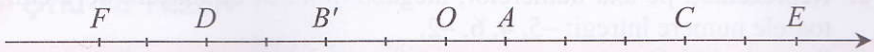
Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Dacă notăm cu O originea axei numerelor, stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) Coordonata punctului O este 1. ☐ b) Coordonata punctului O este 0. ☐

2. Reprezentați pe axa numerelor următoarele numere întregi, alegând unitatea de măsură de 1 cm:
a) –2, 4, –5, 0, 1, –6; b) 6, –5, 8, –3, –4, 2;
c) –7, 2, –9, 6, 0, –1; d) 4, –9, –3, 1, 7, –5.

3. Reprezentați pe axa numerelor următoarele numere întregi:
a) –10, –13, 17, 14, –15; b) 11, –19, 20, –12, –16.

4. Precizați coordonatele punctelor din figura de mai jos, știind că punctul O este originea axei numerelor:



5. Reprezentați pe axa numerelor opusele următoarelor numere întregi:
a) 2, –3, –5, 6; b) 3, 7, –4, –2.

6. Reprezentați pe axa numerelor opusele următoarelor numere întregi:
a) –16, 0, 14, –12, 15, –11; b) –8, 13, 9, –10, 16, –13.

Exerciții și probleme de dificultate medie

7. Punctele E și F sunt reprezentate pe axa numerelor și sunt simetrice în raport cu originea axei O. Determinați coordonata punctului F, dacă coordonata punctului E este:
a) 8; b) –3; c) –5; d) 4.

8. Punctele C și D sunt reprezentate pe axa numerelor cu originea în punctul O și au coordonatele –3, respectiv 1. Determinați lungimea unității de măsură știind că:
a) $CD = 4$ cm; b) $CD = 8$ cm; c) $CD = 10$ cm.

9. Punctele A și B sunt reprezentate pe axa numerelor cu originea în punctul O și au coordonatele 3, respectiv 8. Dacă $AB = 40$ mm, aflați OA și OB.

10. Punctele M și M' sunt reprezentate pe axa numerelor și sunt simetrice în raport cu originea axei O. Dacă unitatea de măsură are lungimea de 1 cm și $MM' = 8$ cm, determinați coordonatele punctelor M și M'.

11. Punctele E și F sunt reprezentate pe axa numerelor cu originea în punctul O și au coordonatele 4, respectiv –5. Dacă $EF = 63$ mm, aflați OE și OF.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

12. Punctele M și N sunt reprezentate pe axa numerelor cu originea în punctul O și au coordonatele –2, respectiv –9. Dacă $ON = 45$ mm, aflați MN.

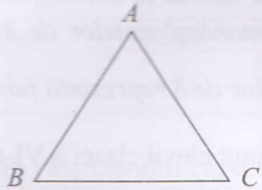
GEOMETRIE

Capitolul II
TRIUNGHIUL

Lecția 1. Triunghiul: definiție, elemente, clasificare

Citesc și rețin

Definiție: Fiind date trei puncte necoliniare A, B și C, se numește **triunghi** determinat de punctele A, B, C reuniunea segmentelor $AB \cup BC \cup CA$.



Notăm ΔABC.

Punctele A, B și C se numesc **vârfurile** triunghiului, segmentele AB, BC și CA se numesc **laturile** triunghiului, iar unghiurile $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$ se numesc **unghiurile** triunghiului.

Observații:

1. Latura AB se opune unghiului $\sphericalangle C$, latura BC se opune unghiului $\sphericalangle A$, iar latura CA se opune unghiului $\sphericalangle B$.

2. Unghiul $\sphericalangle A$ se opune laturii BC, unghiul $\sphericalangle B$ se opune laturii AC, iar unghiul $\sphericalangle C$ se opune laturii AB.

A. Clasificarea triunghiurilor în funcție de lungimile laturilor

Definiții:

1. Triunghiul care are două laturi congruente se numește triunghi **isoscel** (fig. 1).

Observație: Latura triunghiului isoscel care nu este congruentă cu celelalte două se numește **bază**.

2. Triunghiul care are cele trei laturi congruente se numește triunghi **echilateral** (fig. 2).

3. Triunghiul ale cărui laturi au lungimi diferite se numește triunghi **oarecare** sau **scalen** (fig. 3).

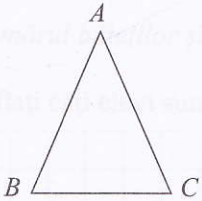


fig. 1

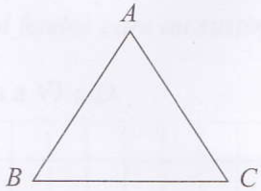


fig. 2

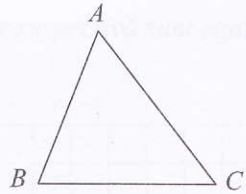


fig. 3

B. Clasificarea triunghiurilor în funcție de măsurile unghiurilor

Definiții:

1. Triunghiul care are cele trei unghiuri ascuțite se numește triunghi **ascuțitunghic** (fig. 4).

2. Triunghiul care are un unghi drept se numește triunghi **dreptunghic** (fig. 5).

3. Triunghiul care are un unghi obtuz se numește triunghi **obtuzunghic** (fig. 6).

Observație: Latura opusă unghiului drept se numește **ipotenuză**, iar celelalte două laturi se numesc **catete**.

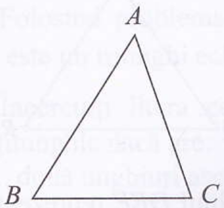


fig. 4

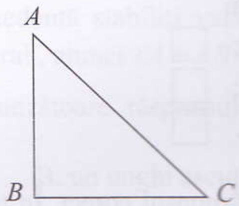


fig. 5

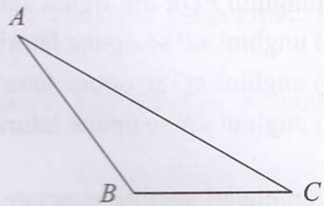
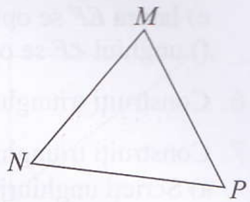


fig. 6

Cum se aplică?

1. Pentru triunghiul MNP reprezentat în figura alăturată precizați:

a) vârfurile; b) laturile; c) unghiurile.



Soluție:

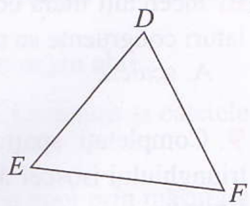
a) Vârfurile triunghiului MNP sunt punctele M, N și P.

b) Laturile triunghiului MNP sunt segmentele MN, NP și PM.

c) Unghiurile triunghiului MNP sunt $\sphericalangle MNP$, $\sphericalangle NPM$ și $\sphericalangle PMN$.

2. Măsurați laturile triunghiului DEF reprezentat în figura alăturată și apoi încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

A. isoscel; B. echilateral; C. scalen.



Soluție:

Măsurând cu rigla gradată laturile triunghiului DEF obținem $DE = 2{,}3$ cm, $EF = 2{,}5$ cm și $FD = 2{,}3$ cm, prin urmare răspunsul corect este A. isoscel.

Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Citiți următoarele notații:

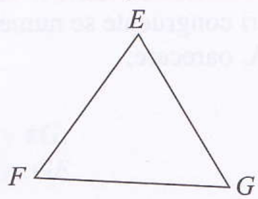
a) ΔDEF; b) ΔPQR; c) ΔABC; d) ΔMNP.

2. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect. Pentru triunghiul EFG reprezentat în figura alăturată scrieți:

a) vârfurile triunghiului ....;

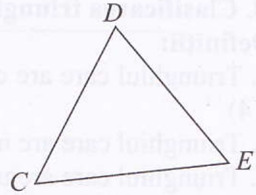
b) laturile triunghiului ....;

c) unghiurile triunghiului ....



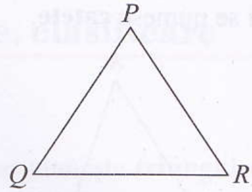
3. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții.
În triunghiul CDE din figura alăturată:

a) latura CD se opune unghiului $\sphericalangle E$; ☐
b) latura CE se opune unghiului $\sphericalangle C$; ☐
c) latura DE se opune unghiului $\sphericalangle C$. ☐



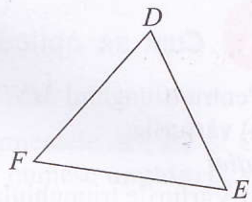
4. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții.
În triunghiul PQR din figura alăturată:

a) unghiul $\sphericalangle P$ se opune laturii QR; ☐
b) unghiul $\sphericalangle Q$ se opune laturii PR; ☐
c) unghiul $\sphericalangle R$ se opune laturii QR. ☐



5. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect. În triunghiul DEF reprezentat în figura alăturată:

a) latura DE se opune unghiului ....;
b) unghiul $\sphericalangle E$ se opune laturii ....;
c) latura DF se opune unghiului ....;
d) unghiul $\sphericalangle D$ se opune laturii ....;
e) latura EF se opune unghiului ....;
f) unghiul $\sphericalangle F$ se opune laturii ....



6. Construiți triunghiul DEF. Scrieți vârfurile, laturile și unghiurile triunghiului DEF.

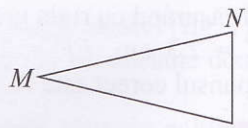
7. Construiți triunghiul MNP.

a) Scrieți unghiurile care se opun laturilor MN, NP, respectiv PM.
b) Scrieți laturile care se opun unghiurilor $\sphericalangle M$, $\sphericalangle N$, respectiv $\sphericalangle P$.

8. Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect. Triunghiul care are două laturi congruente se numește triunghi:

A. scalen; B. echilateral; C. isoscel.

9. Completați spațiul punctat cu răspunsul corect. Baza triunghiului isoscel MNP reprezentat în figura alăturată este latura ....



10. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. Dacă lungimile laturilor triunghiului MNP îndeplinesc condiția $MN \neq NP \neq PM$, atunci triunghiul este:

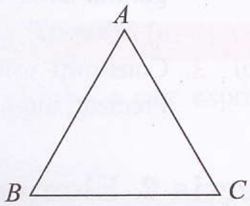
A. scalen; B. echilateral; C. isoscel.

11. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. Triunghiul care are cele trei laturi congruente se numește:

A. oarecare; B. isoscel; C. echilateral.

Exerciţii şi probleme de dificultate medie

12. Măsuraţi unghiurile triunghiului echilateral ΔABC reprezentat în figura alăturată şi apoi completaţi spaţiile punctate cu valorile corespunzătoare:



a) $\sphericalangle A =$ ....;
b) $\sphericalangle B =$ ....;
c) $\sphericalangle C =$ ....

13. Folosind problema precedentă stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiei: Dacă ABC este un triunghi echilateral , atunci $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$. ☐

14. Încercuiţi litera corespunzătoare răspunsului corect. Un triunghi se numeşte ascuţitunghic dacă are:

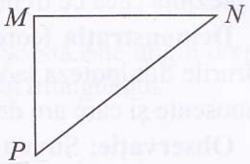
A. două unghiuri ascuţite; B. un unghi ascuţit; C. trei unghiuri ascuţite.

15. Folosind rezultatul problemei 12 stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiei. Triunghiul echilateral este un triunghi ascuţitunghic. ☐

16. Încercuiţi litera corespunzătoare răspunsului corect. Triunghiul care are un unghi drept se numeşte:

A. echilateral; B. dreptunghic; C. obtuzunghic.

17. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect. Pentru triunghiul dreptunghic MNP reprezentat în figura alăturată precizaţi:



a) unghiul drept ....;
b) ipotenuza ....;
c) catetele ....

18. Încercuiţi litera corespunzătoare răspunsului corect. Un triunghi se numeşte obtuzunghic dacă are:

A. un unghi drept; B. un unghi ascuţit; C. un unghi obtuz.

19. Construiţi triunghiul ABC dreptunghic în C şi apoi precizaţi ipotenuza şi catetele acestuia.

20. Construiţi triunghiul dreptunghic DEF cu măsura $\sphericalangle D = 90°$ şi apoi prin măsurare stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $EF > DE$; b) $EF > DF$.

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Construiţi triunghiul EFG şi apoi precizaţi:
a) laturile care se opun unghiurilor $\sphericalangle E$, $\sphericalangle F$, respectiv $\sphericalangle G$;
b) unghiurile care se opun laturilor EF, FG, respectiv GE.

(3p) **2.** Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor. Dacă latura MN este baza triunghiului isoscel MNP, atunci:

a) $MN \equiv NP$; ☐ b) $NP \equiv PM$; ☐ c) $MP \equiv MN$. ☐

(3p) **3.** Construiți triunghiul dreptunghic DEF a cărui ipotenuză este latura DE. Precizați unghiul drept al triunghiului DEF.

Lecția 2. Elemente de raționament geometric*

Citesc și rețin

În matematică se întâlnesc mai multe tipuri de propoziții: **axiome, definiții** și **teoreme**.

Axioma este propoziția care exprimă un adevăr acceptat fără demonstrație.

Definiția este propoziția cu ajutorul căreia se introduce o noțiune nouă.

Teorema este propoziția care exprimă un adevăr care se demonstrează prin raționamente bazate pe axiome, definiții sau alte teoreme.

În general structura unei teoreme este: „Dacă..., atunci...".

Partea din enunțul teoremei care urmează după cuvântul „Dacă" se numește **ipoteză** și prezintă ceea ce se cunoaște.

Partea din enunțul teoremei care urmează după cuvântul „atunci" se numește **concluzie** și prezintă ceea ce trebuie demonstrat.

Demonstrația teoremei este formată dintr-un șir de raționamente bazate pe adevărurile din ipoteza teoremei și pe adevărurile exprimate de alte propoziții matematice cunoscute și care are drept finalitate acceptarea concluziei ca adevărată.

Observație: Structura unei probleme de matematică este identică cu structura unei teoreme.

Cum se aplică?

1. Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect. Propoziția: „Unghiul cu măsura de 90° se numește unghi drept." este:

A. axiomă; B. definiție; C. teoremă.

Soluție:

B. Deoarece propoziția respectivă introduce noțiunea de unghi drept, rezultă că răspunsul corect este: B. definiție.

2. Stabiliți ipoteza și concluzia teoremei: „Dacă $a \mid b$ și $b \mid a$, atunci $a = b$, oricare ar fi numerele naturale a și b."

Soluție:

Ipoteza teoremei este „$a \mid b$ și $b \mid a$", iar concluzia teoremei este „$a = b$".

* Lecția 2. Elemente de raționament geometric este facultativă